

獨立模型中投影中心量測精度探討

史天元

國立交通大學土木工程系

摘要

在獨立模型法空中三角之中，投影中心觀測量的加入對增強幾何結構有極大之功效。本文回顧求取投影中心模型座標的數種方法，並就雙高層法(Double Z Method)及解析相對方位法之精度，進行探討。

關鍵詞：獨立模型，投影中心。

1、前言

獨立模型法(Independent Model) 空中三角乃由立體像對組成模型之後，量測適當點位之模型座標，以模型為單位，經平差而串接成區的方法。通用的數學模式為三度空間相似轉換(3D Similarity Transformation)。

獨立模型法曾為航空測量作業之主流。近年來雖有逐步為光束法取代之趨勢，但仍為作業單位中廣為應用的方法。其主要原因可能為：

1. 作業流程流暢、人性化

對獨立模型而言，以立體模型為單位。而製圖時亦以立體模型為單位。因此在空中三角量測時，即可完整檢查各像對的立體效果。可說是對像片品質控制的一項十分確實的作業。使用立體製圖儀以立體像對量測模型座標，通常亦較以單片座標量測儀(法)進行座標量測愉快。

2. 精度相差有限

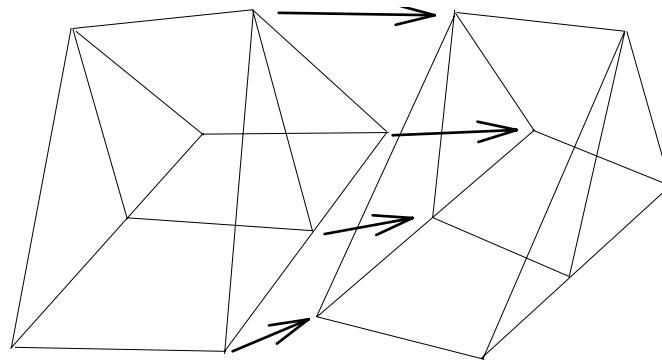
光束法之優點為其嚴密性。在光束法中，觀測量為像面座標，可直接引入空中三角為觀測量。因此，對誤差之分配較為合理。相對上，獨立模型以模型座標為觀測量，對於像面之誤差難做最直接適宜的處理。但是，對由製圖品質的量測空照像機而言，其透鏡之誤差均十分的小。因此，獨立模型法及光束法之空中三角成果相差有限。以美國為例，雖然大多數實際作業均已應用光束法進行空中三角，但目前航空測量業界大多使用基本模式，自率法及附加參

數法使用之頻率不高 (Thorpe, 1993)。

3. 可使用繪圖儀器進行

由於空中三角所需之模型座標，乃由立體繪圖儀量測，故不需像面座標量測儀等儀器。不過，此項優勢已逐步隨同解析製圖儀 (Analytical Plotter) 的發展而喪失。而實際上，在(1) 中所述之優點，亦可藉解析製圖儀配合適當流程達到，與是否採用光束法進行空中三角平差無絕對關係。

在獨立模型法空中三角之中，為期增加幾何之強度，投影中心座標的引入平差，有十分好之效果(圖一)。



圖一：獨立模型中，投影中心幾何控制性之示意

就求取投影中心的模型座標之方法而言，包含下列數種：

- 方格量測空間後方交會法 (Space Resection with Grid)；
- 雙高層量測空間前方交會法 (Double Z Method)；
- 儀器法 (Instrumental Method)；
- 立體格網模型相似轉換法 (Similarity Transformation with Stereo Grid Model)；
- 解析相對方位 (Analytical Relative Orientation)。

茲簡述各法之原理如下：

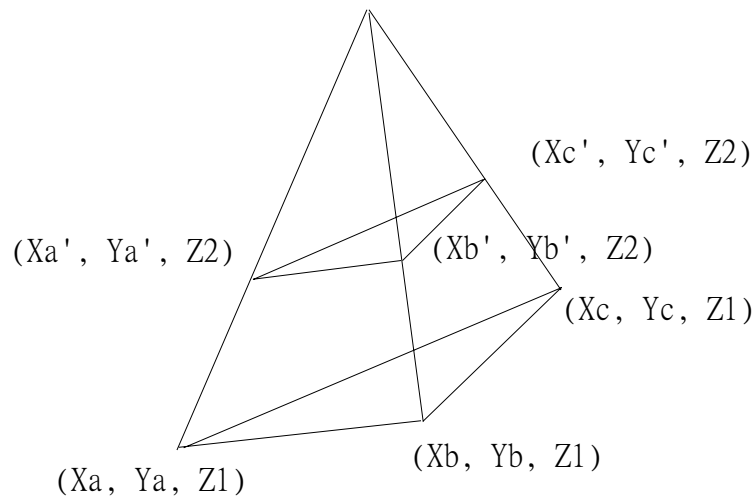
1. 方格量測空間後方交會法

在本法中所用之模式為空間後方交會。通常使用網格玻璃板進行。量測方格點之模型座標。像面座標(格子點)為已知，故使用後方交會便可取得各

投影中心之座標。

2. 雙高層量測空間前方交會法

此法又稱差別高程法 (ΔZ Method; Wolf, 1983)。本法之觀測量均為模型座標。量測相同像面點分別在 Z_1 和 Z_2 兩個不同高程值時之模型座標(X, Y)，則可由至少兩組點求得投影中心之座標(圖二)。



圖二：雙高層量測空間前方交會法示意

3. 儀器法

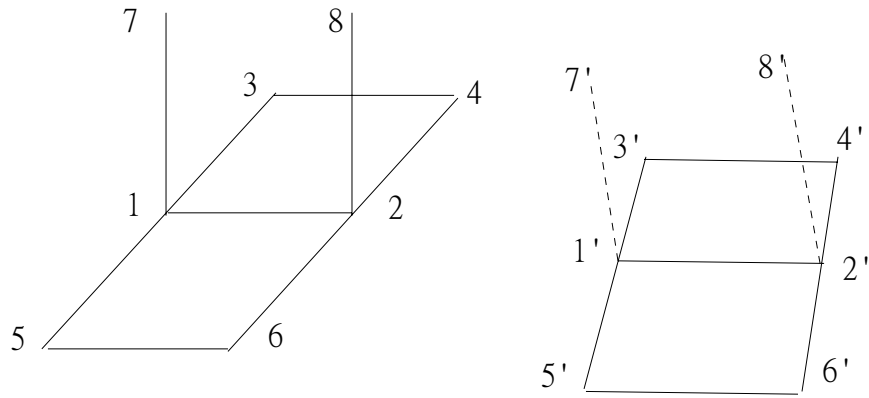
本法乃藉助於儀器的特殊設計而達成直接量測的目的。例子有：Kern PG-2, Zeiss D-2, E-3等。本法包括兩個部分：

- a. 輔以精密水準管將空間導桿豎直，則所讀取之模型座標，即為投影中心 X/Y 之座標。
- b. 高程值藉由導桿上之刻劃決定。

通常儀器法乃針對投影中心會隨同相對方位作業而改變之立體製圖儀而設計。

4. 立體格網模型相似轉換法

此法為由Ebner所提倡 (Faig, 1976)。其原理如圖三。



圖三：立體格網模型相似轉換示意

本法以方格點用解析法組成立體模型，得投影中心座標 (如點 7, 8)。而後在實際模型裡，量測相同點位之模型座標 (如點 1', 2', 3', 4', 5', 6')，再以此共同點將計算之模型轉換到實測模型中，此時，即可求得 7', 8' 如圖三。

5. 解析相對方位法

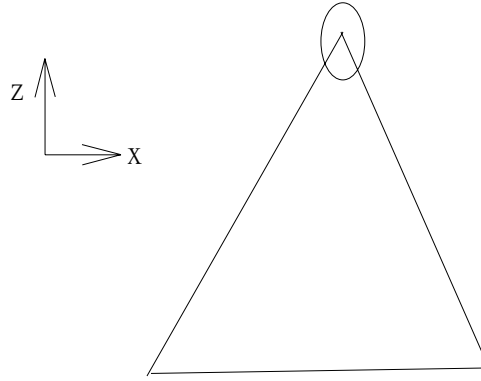
此法僅適用於像面座標為已知之時，因此適用於解析製圖儀或像面座標量測儀。在共軛像點之像面座標量測得之後，以共面式或共線式之相對方位模型計算，便可得兩投影中心之模型座標。

隨同類比立體製圖儀的逐漸淘汰，前四種方法已失去其重要性。本文之目的不在學術性之創見討論，而是針對一個現象的探討。其成果或無助於實際之作業，但應有答疑之意義。

本文謹針對雙高層空間前方交會法及解析相對方位法所得之外方位元素精度進行探討。

2、雙高層法

由圖二之幾何結構可見，在一般的航空立體像對中航高通常遠大於像幅平面涵括之長／寬度。因此，投影中心定位之誤差橢圓應如圖四所示。



圖四、雙高層法誤差橢圓

雙高層法之數學模式為：

$$\frac{X_0 - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y_0 - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_2 - Z_1} \quad (1)$$

可列為

$$\begin{aligned} F_X: & (Z_2 - Z_1)X_0 - (X_2 - X_1)Z_0 - X_1Z_2 + X_2Z_1 = 0 \\ F_Y: & (Z_2 - Z_1)Y_0 - (Y_2 - Y_1)Z_0 - Y_1Z_2 + Y_2Z_1 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中，未知數為投影中心模型座標： X_0, Y_0, Z_0 ；

觀測量為模型點之模型座標： X_1, Y_1, \dots ；

常數為高程設定值： Z_1, Z_2, \dots 。

此一方法需針對兩個投影器分別進行。

由(2)可得線性儀之觀測方程式為：

$$B_i V_i + A_i X_i + W_i = 0 \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_X}{\partial X_1} & \frac{\partial F_X}{\partial X_2} & \frac{\partial F_X}{\partial Y_1} & \frac{\partial F_X}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial F_Y}{\partial X_1} & \frac{\partial F_Y}{\partial X_2} & \frac{\partial F_Y}{\partial Y_1} & \frac{\partial F_Y}{\partial Y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_0 - Z_2) & -(Z_0 - Z_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (Z_0 - Z_2) & -(Z_0 - Z_1) \end{bmatrix}$$

；

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_X}{\partial X_0} & \frac{\partial F_X}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_X}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial F_Y}{\partial X_0} & \frac{\partial F_Y}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_Y}{\partial Z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_2 - Z_1) & 0 & -(X_2 - X_1) \\ 0 & (Z_2 - Z_1) & -(Y_2 - Y_1) \end{bmatrix}。$$

根據最小自乘法準則

$$V^T P V = \min$$

可得
$$X = -[A^T (B B^T)^{-1} A]^{-1} [A^T (B B^T)^{-1} W]$$

未知數之協變方矩陣為：

$$\Sigma_x = \sigma_0^2 N^{-1}$$

其中
$$\sigma_0^2 = \frac{V^T V}{n - u}$$

n：為觀測量數目；

u：為未知量數目。

謹引用一個實測例說明如後，此實測例為在加拿大新布朗斯維克大學 (University of New Brunswick) 所擁有之 Wild A-10 上進行，使用之座標讀取儀為 Wild EK-8。實測數據如表一。選用之高程面為 300 及 400。每點均觀測兩次。

表一、實測之模型座標 (Miljenko, 1985)

點號	Z = 300				Z = 400			
	X ₁	Y ₁	X ₂	Y ₂	X ₁	Y ₁	X ₂	Y ₂
9101	1197.38	1000.10	1197.38	1000.06	1263.29	1000.30	1263.30	1000.28
9102	999.94	999.98	999.97	999.98	1000.06	1000.19	1000.05	1000.21
9103	1197.39	1197.63	1197.35	1197.64	1263.28	1263.74	1263.27	1263.73
9104	999.91	1197.48	999.87	1197.48	999.94	1263.51	999.94	1263.51
9105	1197.37	802.81	1197.37	802.80	1263.30	737.25	1263.30	737.26
9106	1000.08	802.74	1000.07	802.74	1000.14	737.17	1000.16	737.17
9201	1079.86	999.83	1079.85	999.81	1079.88	999.97	1079.88	999.95
9202	882.56	999.89	882.56	999.86	816.80	1000.03	816.78	1000.01
9203	1079.86	1197.15	1079.86	1197.15	1079.87	1263.07	1079.88	1263.07
9204	882.58	1197.13	882.58	1197.13	816.81	1263.06	816.82	1263.04
9205	1079.85	802.47	1079.85	802.48	1079.86	736.81	1079.87	736.83
9206	882.55	802.55	882.54	802.55	816.78	736.90	816.76	736.91

而求得之投影中心模型座標值，及其標準誤差，如表二。

表二、投影中心模型座標估值及其標準誤差

		X	Y	Z
左片	座標估值	999.7193	999.4002	0.1015
	標準誤差	0.0277	0.0245	0.0389
右片	座標估值	1079.8111	99.4209	0.0753
	標準誤差	0.0084	0.0075	0.0119

由所列表二中之標準誤差，可見 $\sigma_x : \sigma_y : \sigma_z \approx 1 : 1 : 1.5$

3、解析相對方位

在量測得適當點位之像面座標後，可由共線式或共面式求解相對方位。通常，均使其中一個投影器之外方位參數為已知。因此，待定參數為：

$$B_Y, B_Z, \omega, \phi, \kappa$$

採用之實測例為由解析製圖儀 Wild BC-3上量測所得，像面座標及平差後之剩餘誤差如表三所示。所得之相對方位估值及其標準誤差如表四。

表三、像面觀測量及解析相對方位後之剩餘誤差

點號	左片 : 10741				右片 : 10737			
	x	Vx	y	Vy	x'	Vx	y'	Vy
4111	7.457	0.000	100.488	0.000	-96.890	-0.000	88.714	-0.000
4112	3.166	-0.000	96.556	-0.000	-101.626	-0.000	84.610	0.000
4131	-0.428	0.000	13.442	0.000	-101.987	0.000	1.837	-0.000
4132	-4.757	0.000	17.480	0.000	-107.582	0.000	5.495	-0.000
4151	-6.469	-0.000	-74.049	-0.001	-101.714	-0.000	-89.076	0.001
4152	-8.153	0.000	-96.700	0.001	-100.351	0.000	-113.171	-0.001
3751	98.486	-0.000	-107.615	-0.000	6.081	-0.000	-111.853	0.000
3755	87.573	0.000	-101.241	0.001	-6.903	0.000	-106.685	-0.001
3735	104.664	0.000	-25.192	0.000	6.831	0.000	-27.407	-0.000
19	94.649	-0.000	-21.640	-0.001	-4.316	-0.000	-24.875	0.001
3731	107.497	0.000	-3.296	0.000	7.696	0.000	-5.484	-0.000
3711	105.765	0.000	88.913	0.000	1.053	0.000	83.479	-0.000

表四、相對方位參數及其標準偏差
像主距：153.594 mm

	估值	標準偏差		估值	標準偏差
ω	1°08'58.47"	0°00' 2.82"	X	90.000	---
ϕ	-2°08'35.32"	0°00' 3.75"	Y	-2.375	0.003
κ	-48'17.95"	00' 1.76"	Z	1.529	0.001

由表四，可見由解析法所求得之投影中心參數之精度，與由雙高層法求得者大有不同。其比值約為：

$$\sigma_{BY} : \sigma_{BZ} = 3 : 1$$

4、結語

在獨立模型法空中三角之著名套裝軟體PAT-M的使用說明 (Klein, 1988)裡，對投影中心的觀測量之誤差建議估值為：

$$\sigma_{X/Y} : \sigma_Z \approx 2 : 1$$

而今，可以推論此乃根據解析法相對方位之作業方法而定得。本文所述之例，亦充分展示了相同待定量，在不同作業方法裡，其所定得之精度可以不同。在本文所述之例中，由於函數模式的差異，竟可達逆轉之效果。

5、致謝

本研究進行之動機，為與中華顧問工程司運輸土木部航空測量組鄭宏達、林耀宗工程師進行訪問討論時所得。本次訪問乃由教育部所贊助。謹此一併致謝。

6、參考文獻

- Faig, W., 1976. Aerotriangulation. Lecture Notes No. 40. Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, N.B., Canada.
- Klein, H., 1988. Instruction Manual for use of program PATM-PC. On-line document with PATM-PC.
- Miljenko, J-S., 1985. Perspective Centre Determination on Wild A-10, Lab Report for SE4321 : Aerotriangulation. University of New Brunswick, Fredericton, N.B., Canada.
- Thorpe, J., 1993. Aerial Photogrammetry: State of the Industry in the US. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 59(11):1599-1604.
- Wolf . P.R., 1983. Elements of Photogrammetry. 2nd Ed., McGraw Hill.

On the Accuracy of Projective Centre Determination for Independent Models

Tian-Yuan Shih

Department of Civil Engineering, National Chiao-Tung University
1001 Ta-Hsueh Road, Hsin-Chu, Taiwan

ABSTRACT

The introduction of projective centre into the block adjustment with independent models can strengthen the geometry and provide much better convergency for the aerotriangulation. In this note, the accuracy of the projective centre determination with two different methods is studied. These two methods are the ΔZ method and the one with analytical relative orientation.

Keywords: Independent model, Projective centre determination